ECRICOME

Banque d'épreuves écrites communes aux concours des Ecoles EDHEC, ESC Bordeaux, ESC Marseille, ESC Reims, ESC Rouen, ICN

OPTION ECONOMIQUE ET TECHNOLOGIQUE

Durée : 4 heures

Aucun document n'est autorisé.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

EXERCICE 1

On rappelle que l'ensemble des matrices carrées d'ordre trois, muni des lois usuelles est une algèbre non commutative, dont on notera I la matrice unité et 0 la matrice nulle.

L'espace vectoriel $E = R^3$ est rapporté à la base canonique
$B = (i, j, k)$, où $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$, $k = (0, 0, 1)$.

On appelle f l'endomorphisme de E dont la matrice relativement à la base B est la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}$$

1°) Déterminer l'image du vecteur $u = i + j + 2k$ par l'application f. Que peut-on dire du vecteur u pour l'endomorphisme f ?

2°) On pose $v = 3j + 2k$ et $B' = (u, v, k)$.

a) Démontrer que B' est une base de E.

b) Soit P la matrice de passage de la base B à la base B'. Calculer la matrice inverse de P par la méthode du pivot de Gauss : les calculs doivent figurer sur la copie (on rappelle que les déterminants ne sont pas au programme).

c) Déterminer la matrice T de f relativement à la base B'.

3°) On considère la matrice N suivante : $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calculer N^2. En déduire N^k si k est un entier supérieur ou égal à 2.

b) Calculer $I + N$. Déterminer T^n en fonction de n et de N, puis de n uniquement.

c) Montrer que $P.N.P^{-1} = A - I$ et que $P.N^2.P^{-1} = A^2 - 2A + I$.

d) Donner l'expression de A^n en fonction de n , I , A et A^2

A SUIVRE

EXERCICE 2

On considère la suite u, dont le terme général u (n) est défini pour tout entier naturel n non nul par la relation suivante :

$$u(n) = \int_0^1 \sqrt[3]{1 - x^n}\, dx$$

1°) Calculer u (1) le premier terme de cette suite.

2°) Démontrer que la suite u est croissante et convergente.

3°) Démontrer que, pour tout réel X tel que $0 \leqslant X \leqslant 1$, on a :

$$1 - X \leqslant \sqrt[3]{1 - X} \leqslant 1 - X/3$$

Interpréter graphiquement la double inégalité précédente.

4°) En déduire un encadrement de u (n), et la limite de u (n) lorsque n tend vers l'infini.

5°) On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{4}{3} \cdot \sqrt[3]{1 - x} & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ f(x) = 0 & \text{si} \quad x < 0 \quad \text{ou} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Montrer que f est la densité d'une variable aléatoire réelle Y.

b) Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire Y. Construire sa représentation graphique dans un plan rapporté à un repère orthonormé, d'unité 3 cm sur chaque axe.

c) Calculer l'espérance de la variable aléatoire Y.

d) Calculer la probabilité de l'événement : $[0,2 < Y \leqslant 1,2]$.

Tournez la page S.V.P.

PROBLEME

Le problème est constitué de deux parties largement indépendantes.

La première partie propose une estimation du paramètre de la loi de Poisson suivie par une variable aléatoire ; la seconde partie étudie l'intervalle de temps qui sépare deux réalisations successives d'un phénomène aléatoire.

Première partie

La société SA POIN est spécialisée dans la location de camions. La direction pense que le nombre de véhicules loués un jour j donné est une variable aléatoire Xj, que les variables Xj sont mutuellement indépendantes et suivent toutes la même loi de Poisson de paramètre a inconnu.

1°) On considère pour tout k entier naturel non nul, la fonction f_k définie pour tout x réel positif ou nul par :

$$f_k(x) = x^k \cdot e^{-x}$$

On appelle (C_k) la courbe représentative de la fonction f_k dans un plan rapporté à un repère orthogonal $R = (0;i,j)$, l'unité étant 2 cm sur l'axe des abscisses, 10 cm sur l'axe des ordonnées.

a) Construire le tableau des variations de la fonction f_k.

b) Préciser l'équation de la demi-tangente à la courbe (C_k) au point O(0,0).

c) Tracer les courbes (C_1) et (C_2) dans le repère R.

2°) On considère, pour tous les entiers naturels non nuls k et q, la fonction g définie pour tout x réel positif ou nul par :

$$g(x) = (f_k(x))^q$$

a) Démontrer que g et f_k ont le même sens de variation.

b) Donner le tableau de variation de g lorsque $k = 8$ et $q = 4$.

3°) La société SA POIN relève le nombre de véhicules loués au cours de 4 journées choisies au hasard, soit : 9, 11, 4, 8 pour les jours $j = 1$, $j = 2$, $j = 3$, $j = 4$ respectivement.

a) Déterminer la probabilité P_a de l'événement :

$$(X_1 = 9) \cap (X_2 = 11) \cap (X_3 = 4) \cap (X_4 = 8).$$

Exprimer P_a en fonction de g(a) où g est la fonction définie à la question 2°) b).

A SUIVRE

b) La direction de la société SA POIN décide de retenir la valeur de a qui donne à la probabilité P_a une valeur maximum.

- Trouver le réel a.
- Calculer alors la probabilité qu'un jour donné, la société SA POIN loue 10 camions.

4°) On se propose de généraliser le procédé. On a noté le nombre de locations au cours de n journées choisies au hasard, soit :

x_1, x_2, ..., x_n pour les jours $j = 1$, $j = 2$, ..., $j = n$ respectivement.

On note m la moyenne arithmétique de ces observations.

L'entreprise décide toujours de choisir a de telle sorte que la probabilité P_a de l'événement :

$$E = (X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap \ldots \cap (X_n = x_n)$$ soit maximum.

a) Calculer P_a en fonction de a.

b) Démontrer que la valeur de a qui maximise P_a est m.

Deuxième partie

La société SA POIN étudie, pour un jour donné, le temps T, exprimé en heures, entre deux locations successives : T est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre 1/3.

1°) a) Rappeler l'espérance et l'écart type de la variable aléatoire T.

b) Redémontrer que la fonction de répartition F de la variable aléatoire T est définie par :

$$F(x) = P(T \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ 1 - e^{-x/3} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

c) En déduire la probabilité que le temps séparant deux locations successives soit, pour ce jour observé, compris entre 1 heure et 2 heures.

2°) Soit t un réel positif fixé pour toute la suite du problème. Soit la variable aléatoire Y_t ayant pour fonction de répartition la fonction G_t définie par :

$$G_t(y) = P(Y_t \leqslant y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad y \geqslant t \\ \dfrac{F(y)}{F(t)} & \text{si} \quad y < t \end{cases}$$

En déduire une densité de probabilité g_t de la variable aléatoire Y_t.

Tournez la page S.V.P.

3°) Soient $Z_1, Z_2, ..., Z_n$ n variables aléatoires indépendantes de même loi que Y_t.
On pose : $S_n = \sup (Z_1, Z_2, ..., Z_n)$.

a) Démontrer que la fonction de répartition H_t de S_n est définie pour tout s réel par :

$$H_t(s) = (G_t(s))^n$$

b) En déduire la densité de probabilité de la variable aléatoire S_n, notée h_t.

4°) Soit b un réel positif.

a) On pose : $p_n(b) = P(|S_n - t| > b)$. Montrer que : $p_n(b) = P(S_n < t - b)$.

b) Calculer $p_n(b)$.

c) Déterminer la limite de $p_n(b)$ lorsque n tend vers plus l'infini.

5°) On définit la variable aléatoire $U_n = n \cdot (t - S_n)$. Pour tout réel u, on pose $K_n(u) = P(U_n \leq u)$.

a) Exprimer $K_n(u)$ en fonction de u.

b) Ecrire le développement limité, à l'ordre 1, par rapport à $\frac{u}{n}$, quand n tend vers plus l'infini, de $\exp\left[-\frac{1}{3}\cdot(t - \frac{u}{n})\right]$.

c) On pose $c = \frac{\exp(-t/3)}{1 - \exp(-t/3)}$ et on considère un réel u fixé.
En déduire la limite de $K_n(u)$ lorsque n tend vers plus l'infini en fonction de u et c.

d) On note K (u) cette limite. Reconnaître la loi de la variable aléatoire U dont la fonction de répartition est la fonction K ainsi définie.

FIN